Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

1)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$x^2 = |x-6|$ (5 pont)

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{array}{l} \lg(x+y) = 2\lg x \\ \lg x = \lg 2 + \lg(y-1) \end{array}\right\}$$ (9 pont)

2) a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?

$(x-1)^3 - (x+1)^3 > -8$ (4 pont)

b) Az alábbi f és g függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük. $f(x) = \sqrt{x+3}$ és $g(x) = -0,5x + 2,5$.

Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f és g függvényt a $[-3;6]$ intervallumon! Igazolja számítással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám! (4 pont)

c) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$0,5x + \sqrt{x+3} \le 2,5$ (6 pont)

3) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0$, $x \ne 1$ és $y > 0$, $y \ne 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \log_x y + \log_y x = 2 \\ \sin(2x+3y) + \sin(4x+y) = 1 \end{array}\right\}$$ (13 pont)

4)

a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ függvényt! (5 pont)

b) Tekintsük az $\left|(x-2)^2 - 1\right| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k \in]-6;6[$ intervallumon! (2 pont)

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

5) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{array}{l} \log_x\left(x^2y^3\right) + \log_y\left(x^3y\right) = 9 \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = 0 \end{array}\right\}$$ (16 pont)

6) a) Igazolja, hogy a $\left(-\frac{1}{2}\right)$, a 0 és a 3 is gyöke a $2x^3 - 5x^2 - 3x = 0$ egyenletnek, és az egyenletnek ezeken kívül más valós gyöke nincs! (5 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$2\cos^3 x - 5\cos^2 x - 3\cos x = 0$ (6 pont)

c) Mutassa meg, hogy a $2 \cdot 8^x + 7 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x = 0$ egyenletnek nincs valós gyöke! (5 pont)

7) Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!

a) $\left.\begin{array}{l} 2x = 12 - y \\ 2\sqrt{x} = y \end{array}\right\}$ (7 pont)

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y-3}{4} = 3 \\ \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{y-3} = 0 \end{array}\right\}$ (7 pont)

8) Oldja meg a $[4;6]$ alaphalmazon az alábbi egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget!

a) $\left|5 - |x|\right| = 3$ (3 pont)

b) $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+10} - 1$ (6 pont)

c) $2\cos^2 x + \cos x - 1 \le 0$ (7 pont)

9) a) Határozza meg $\dfrac{x}{y}$ értékét, ha $\dfrac{2x+3y}{4x+3y} = \dfrac{9}{10}$ $(y \ne 0,\ y \ne -2x)$. (3 pont)

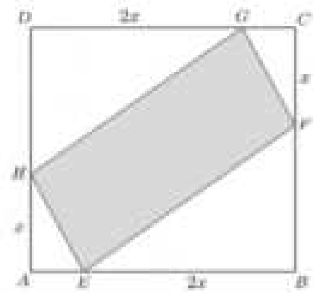
b) Legyen $f(x) = x^2 - 11x + 30$.

Igazolja, hogy ha $f(x) \ne 0$, akkor $\dfrac{f(x+1)}{f(x+1)} = \dfrac{x-4}{x-6}$. (5 pont)

c) Oldja meg az $\dfrac{x-4}{x-6} \le -1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

(5 pont)

10) Az *ABCD* négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az EFGH paralelogrammát írjuk. Az *AH* és *CF* szakasz hossza x méter, a *BE* és *DG* szakasz hossza $2x$ méter $(0 < x < 2)$.



a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma hossza (m^2-ben mérve): $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$. (4 pont)

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen! (4 pont)

c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1{,}25$. (6 pont)

11) A *szókereső* mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosoknak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \ge 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\dfrac{n^2 - 5n + 10}{2}$ pontot kap a játékos.

a) Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja!

(3 pont)

b) Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos! (6 pont)

c) Igazolja, hogy ha m tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2 + \dfrac{m(m+1)}{2}$ pontot! (A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú "szó" létezik.) (7 pont)